PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD · 2012

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación

EUSKAMPUS
Nazioarteko Bikaintasun Campusa
Campus de Excelencia Internacional

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jarri behar duzula.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Dado el sistema

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = m \\ x + (m-1)y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.
b) Resolverlo, si es posible, para los casos m = 0 y m = 3.

Ejercicio A2

Dados los puntos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(a - 2, 7, b)

a) Determinar los valores de los parámetros a y b para que dichos puntos estén alineados.
b) Para los valores calculados en el apartado anterior, obtener la ecuación el plano que pasa por el punto P(0, -3, 5) y es perpendicular al vector AC.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

a) Hallar los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto (1, 1), tenga un máximo en x = - 4 y una tangente horizontal para x = 0.
b) Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y dibujar la gráfica de la función.

Ejercicio A4

Calcula la integral

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx \ .$$

Ejercicio A5

Se llama número capicúa al número entero positivo que expresado en notación decimal se lee de igual forma de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, como por ejemplo los números 232 y 8778.
Determinar cuántos números capicúas hay menores que 100.000.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Sea B la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar para qué valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$.
b) Calcular la inversa de B para los valores de m del apartado anterior.

Ejercicio B2

Se consideran los planos 3 x + 4 y + 5 z = 0, 2 x + y + z = 0 y el punto A(-1, 2, 1).

a) Halla el plano que pasa por el punto A y por la recta intersección de los planos anteriores.
b) Calcula un plano que pase por el punto B(0, 0, -3) y que sea paralelo al plano del apartado anterior.

Ejercicio B3

Una tienda vende aceite a 2 euros el litro. Al vender x litros los costes de todo tipo (expresados en euros) son $0.5x + Cx^2$. Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 litros. Encontrar el valor de C y el beneficio máximo obtenido.

Ejercicio B4

Dadas las tres funciones : $f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = x^2/4$:

a) Dibuja el recinto finito limitado por las gráficas de las tres funciones,
b) Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio B5

Si en la sucesión de números naturales:

1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11,12, 13,14,…

se suprimen los cuarenta primeros múltiplos de 5 queda una nueva sucesión. Calcula la suma de los 160 primeros términos de la nueva sucesión.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

a) La discusión del sistema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.
b) La resolución completa para los casos que se señalan, se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos

Problema A.2 (2 puntos)

Cada uno de los apartados se valorará hasta un máximo de 1 punto.

Problema A.3 (2 puntos)

a) El cálculo correcto de A, B y C se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.
b) La obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.
c) Por último, el dibujo de la curva se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos

Problema A.4 (2 puntos)

La obtención correcta de la integral se valorará hasta con 1 punto.

Problema A.5 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- La realización de un buena explicación aclaratoria de la situación (esquema, tabla, organización de capicúas de una , dos , tres , cuatro y cinco cifras) se valorará hasta 0,75 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.

OPCIÓN B

Problema B1 (2 puntos)

a) La obtención correcta del parámetro m y su discusión posterior se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.
b) La obtención de la matriz inversa, en los dos casos, se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema B2 (2 puntos)

Cada uno de los apartados se valorará hasta un máximo de 1 punto.

Problema B3 (2 puntos)

- La obtención de la fórmula del beneficio en función de las ventas se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos.
- El planteamiento del cálculo de C ventas se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos.
- El cálculo de C y el beneficio máximo se valorarán cada uno de ellos con un máximo de 0,5 puntos.

Problema B4 (2 puntos)

a) La obtención de los puntos de corte de las tres gráficas se valorará hasta 0,5 puntos como máximo.
b) El dibujo del recinto y las gráficas correspondientes a las tres funciones se valorará hasta 0,75 puntos como máximo
c) El cálculo del área del recinto que se pide aplicando la integral definida correspondiente se valorará hasta 0,75 puntos como máximo

Problema B5 (2 puntos)

- La realización de una buena explicación aclaratoria de la situación (indicando qué términos hay que sumar,..) se valorará hasta 0,75 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Problema A1

a) El determinante de la matriz de coeficientes es (m-2)(m-1) por lo que para m distinto de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado.

- Para m = 1 la matriz y la matriz ampliada tienen rango igual a 2 y por tanto el sistema es compatible indeterminado.
- Para m = 2 el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3 por la que el sistema es incompatible en este caso.

b) Para m = 0 la solución es (x, y, z) = (1, 1, 0). Para m = 3 la solución es: (x, y, z) = (1,-2, 3).

Problema A2

a) Los vectores AB y AC deben ser proporcionales es decir, ha de existir un valor real m tal que

1. m(3, -4;-3) = (a – 1, 4, b - 2)

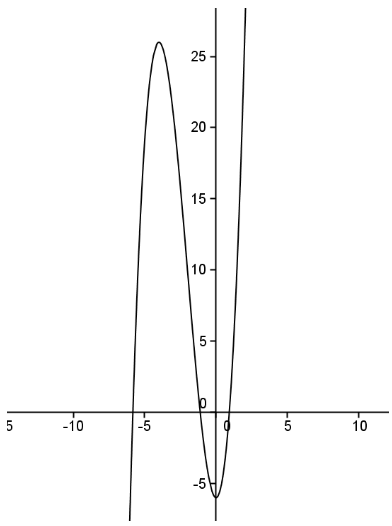
Se deduce que m = -1 y con este dato que a = -2 y b = 5.

b) El vector AC es v = (-3, 4, 3) y la ecuación del plano -3x + 4y + 3z +D = 0. Ahora basta imponer que P pertenece al plano y resulta D =- 3 por lo que el plano buscado es -3x + 4y + 3z - 3 = 0.

Problema A3

a) La primera condición implica que 1 = 1+A+B+C. Las otras dos condiciones significan que la derivada se anula en x = -4 y en x = 0. Resultan 48- 8A+B = 0 y B = 0. Resolviendo se obtienen A = 6, B = 0 y C = -6.

b) La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$. Su derivada es $f'(x) = 3x(x+4)$) y su segunda derivada es $f''(x) = 6(x+2)$). Se obtiene que x = -4 corresponde a un máximo y x = 0 a un mínimo. La función es creciente en $(-\infty, -4)$, es decreciente en (-4; 0) y es creciente en $(0, \infty)$.



Problema A4

Esta integral se calcula mediante una descomposición directa en fracciones simples. Se obtiene:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = 3\ln(x+2) + 2\ln(x-2) + C$$

Problema A5

De una cifra son 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9 es decir hay en total 9. De dos cifras también hay 9. Para los de tres cifras se puede utilizar los dígitos del 0 al 9 en la cifra central y del 1 al 9 en la primera por lo que en este caso hay 90 y hay también 90 de cuatro cifras. Finalmente de 5 cifras hay 900. En total resultan

9 + 9 + 90 + 90 + 900 = 1098.

OPCIÓN B

Problema B1

a) Se verifican

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2+2m+m^2 & 2 \\ 2 & 2-2m+m^2 \end{pmatrix} \text{ y } 2B + I = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

La igualdad de ambas matrices equivale a $m^2 - 1 = 0$, de donde m=1 y m= -1

b) La matriz inversa para m =1 es :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

mientras que para m=-1 la matriz inversa es :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema B2

a) Hay variadas formas de resolver el problema, una de ellas es utilizando el concepto de haz de planos. . El plano buscado pertenecerá al haz de planos

$$3x + 4y + 5z + m(2x + y + z) = 0$$

al imponerle que pase por el punto A(–1, 2, 1) se obtiene m= -10 Por tanto el plano es 17x + 6y + 5z = 0

b) Al ser paralelo la ecuación será 17x+6y+5z+C=0, como además contiene al punto B(0, 0, -3) se ha de cumplir que -15+C=0, por tanto C=15, luego el plano pedido es : 17x+6y+5z = -15

Problema B3

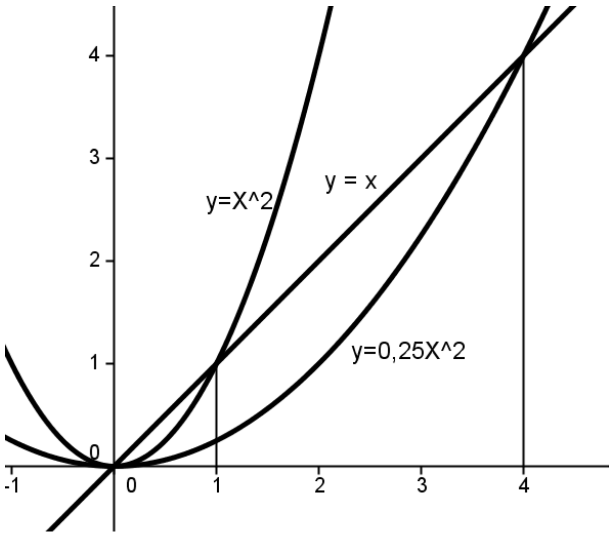
El beneficio es igual al ingreso de la venta menos los costes. Si se venden x litros resultan unos ingresos de B(x)=2 x- (0.5 x+ C x^2). La primera derivada de esta función es

B'(x)= 1.5 – 2 C x.

Por los datos debe anularse para x=750. Es decir C=1/1000. Para ese valor de C resulta B(750)=562.5 euros.

Problema B4

a) El dibujo de las tres funciones es suficientemente ilustrativo



Resolviendo los puntos de corte de las gráficas entre sí, podemos comprobar que la recta y la parábola g se cortan en el punto x= 1, mientras que la recta y la parábola h se cortan en el punto x= 4. Estos puntos delimitan el recinto a calcular

b) El área está dada por

$$\int_0^1 (x^2 - 0,25x^2)dx + \int_1^4 (x - 0,25x^2)\,dx = \frac{3}{12} + \frac{27}{12} = \frac{30}{12} = \frac{10}{4}$$

Problema B5

En total de los 200 primeros números naturales se quitan los 0 múltiplos de 5 existentes. Por tanto de la suma de los primeros 200 naturales hay que restar la suma de los 40 primeros múltiplos de cinco. Es decir se obtiene para la suma pedida

$$\text{Suma}= \frac{(200)(201)}{2} - 5\frac{(40)(41)}{2} = 16000$$